DENEY 5 İkinci Dereceden Sistem

DENEYİN AMACI

1. İkinci dereceden sistemin karakteristiklerini anlamak.
2. Sönüm oranı ζ'nin, ikinci dereceden sistem üzerindeki etkisini gözlemlemek.
3. Doğal frekans ω_n'in, ikinci dereceden sistem üzerindeki etkisini gözlemlemek.

GENEL BİLGİLER

İkinci dereceden bir sistem, ikinci dereceden diferansiyel denklem ile, şu genel formda ifade edilebilir:

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = b_n \frac{d^n r(t)}{dt^n} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

Laplace domenine dönüştürürsek

$$C(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} R(s) + \frac{K(s)}{s^2 + a_1 s + a_0} \qquad (1)$$

C(s)'in birinci terimi, sıfır başlangıç değerindeki (c(0)=0) sistem tepkesi olan, sıfır-durum bileşenidir. İkinci terim, giriş yokken, c(0) başlangıç değerinin neden olduğu sistem tepkesi olan, sıfır-giriş bileşenidir. K(s), başlangıç değeriyle ilişkili bir polinomdur.

Başlangıç değeri sıfır iken, denklem (1)'in transfer fonksiyonu şu şekildedir:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

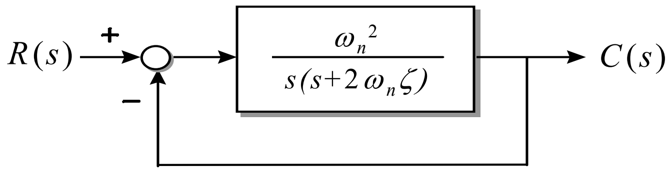
Bu deneyde, basit bir ikinci dereceden sistem ele alınacaktır. Basit ikinci dereceden sistemin transfer fonksiyonu şu şekildedir

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \qquad (2)$$

Denklem (2), en basit ikinci dereceden sistemi tanımlar. Bu denklemden, b_0, a_0 ve a_1 katsayılarının, sisteme yada sistem karakteristiklerine etkilerini anlamak oldukça zordur. Analitik uygunluk için, ikinci dereceden sistem genellikle aşağıdaki formda yazılır

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}$$

Eğer doğal frekans ω_n ve sönüm oranı ζ biliniyorsa, bunlardan ikinci dereceden sistemin karakteristikleri elde edilir. İkinci dereceden sistemin blok diyagramı şekil 5-1'de gösterilmiştir.



Şekil 5-1 İkinci dereceden sistemin blok diyagramı

Bu sistemin transfer fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir.

$$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\omega_n\varsigma)}}{1+\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\omega_n\varsigma)}}$$

İkinci dereceden sitemin dinamik davranışı ω_n ve ζ kullanılarak tanımlanabilir. Aşağıda, ikinci dereceden sistemin basamak giriş tepkesi ele alınacaktır.

1. Eksik Sönümlü Durum: $0 < \zeta < 1$

   C(s)/R(s) yeniden yazılırsa

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\varsigma\omega_n + j\omega_d)(s+\varsigma\omega_n - j\omega_d)}$$

   Burada $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}$, sönümlü doğal frekans olarak adlandırılır.

   Basamak giriş $u_s(t)$ için,

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s}\,\frac{\omega_n^2}{(s+\varsigma\omega_n + j\omega_d)(s+\varsigma\omega_n - j\omega_d)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+\varsigma\omega_n}{(s+\varsigma\omega_n)^2+\omega_d^2} - \frac{\varsigma\omega_n}{(s+\varsigma\omega_n)^2+\omega_d^2} \end{aligned}$$

C(s)’nin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$c(t) = 1 - e^{-\varsigma\omega_n t}(\cos\omega_d t + \frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin\omega_d t)$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma})$$

Yukarıdaki denklemden, ikinci dereceden sistemin ω_d frekansında osilasyon yapacağı görülmektedir.

2. Kritik Sönümlü Durum: ζ =1

C(s)/R(s) yeniden yazılırsa

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

Basamak giriş $u_s(t)$ için,

$$C(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+\omega_n)} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

C(s)’nin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$c(t) = 1 - e^{-\varsigma\omega_n t}(1+\omega_n t)$$

3. Aşırı Sönümlü Durumlar:

(1) ζ >1

Basamak giriş $u_s(t)$ için,

$$C(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{(s+\varsigma\omega_n+\omega_n\sqrt{\varsigma^2-1})(s+\varsigma\omega_n-\omega_n\sqrt{\varsigma^2-1})}$$

C(s)’nin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\varsigma^2-1}\ (\varsigma+\sqrt{\varsigma^2-1})}e^{-(\varsigma+\sqrt{\varsigma^2-1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\varsigma^2-1}\ (\varsigma-\sqrt{\varsigma^2-1})}e^{-(\varsigma-\sqrt{\varsigma^2-1})\omega_n t}$$

$$= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\varsigma^2-1}}\left(\frac{e^{-p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{-p_2 t}}{p_2}\right)$$

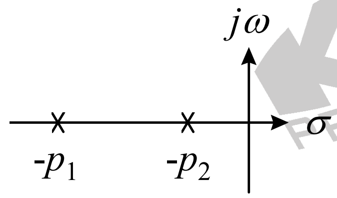
$$p_1 = (\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 1})\omega_n$$
$$p_2 = (\varsigma - \sqrt{\varsigma^2 - 1})\omega_n$$

(2) $\zeta >> 1$

$$\because \; p_1 = (\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 1})\omega_n, \quad p_2 = (\varsigma - \sqrt{\varsigma^2 - 1})\omega_n$$

$$\therefore \; |p_1| >> |p_2|$$

$e^{-p_1 t}$ 'nin azalma hızı, $e^{-p_2 t}$ 'ye göre çok büyük olduğu için, $e^{-p_1 t}$ terimi ihmal edilebilir. Başka bir ifadeyle, p_1 ve p_2 birbirinden uzaksa ve $-p_2$ terimi $j\omega$ eksenine çok yakınsa (şekil 5-2), $e^{-p_1 t}$ terimi ihmal edilebilir.



Şekil 5-2 Kutup diyagramı

Sonuç olarak, matematiksel denklem yeniden yazılırsa

$$\frac{C(s)}{R(s)} \approx \frac{\varsigma\omega_n - \omega_n\sqrt{\varsigma^2 - 1}}{s + \varsigma\omega_n - \omega_n\sqrt{\varsigma^2 - 1}} = \frac{p_2}{s + p_2}$$

Diğer yandan, ikinci dereceden sistemde p_1 ve p_2 birbirinden uzakta ise, bu ikinci dereceden sistem, birinci dereceden bir sistem ile yaklaşık olarak temsil edilebilir.

4. Sönümsüz Durum: $\zeta = 0$

C(s)/R(s) yeniden yazılırsa

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + j\omega_n)(s - j\omega_n)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

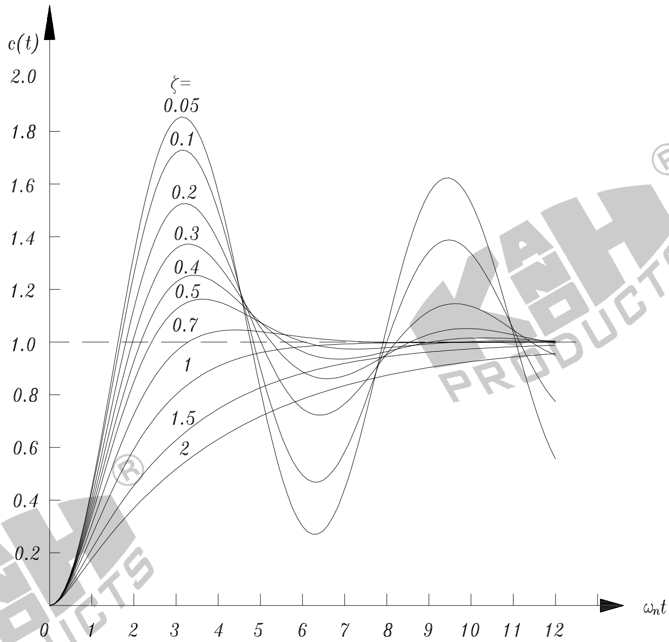
Basamak giriş $u_s(t)$ için, sönümsüz sistem sabit genlikte osilasyon yapmaya devam edecektir.

$$C(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

C(s)'nin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t$$

Şekil 5-3, farklı ζ değerleri için basamak tepkesi eğrilerini göstermektedir.



Şekil 5-3 İkinci dereceden sistemin basamak giriş tepkesi

Yukarıda, ikinci dereceden bir sistemin temel karakteristikleri ele alınmıştır. Aşağıda, bu sistemin diğer karakteristikleri ele alınacaktır.

Basamak giriş $u_s(t)$ için,

$$C(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma})$$

c(t)'nin türevi alınırsa

$$\frac{dc(t)}{dt} = -\frac{\varsigma\omega_n e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma})$$
$$+\frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}\cos(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma})$$
$$\therefore \frac{dc(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\varsigma^2}} e^{-\varsigma\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}\,t$$

dc(t)/dt=0 ise

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}} \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

$t = n\pi \big/ \omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}$ olduğunda, c(t) yerel minimum yada yerel maksimum olur.

$$c(t)\big|_{\min\ or\ \max} = 1 + \frac{e^{-n\pi\varsigma/\sqrt{1-\varsigma^2}}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\sin(n\pi - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma})$$
$$= 1 + (-1)^{n-1} e^{-n\pi\varsigma/\sqrt{1-\varsigma^2}} \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

Maksimum aşma, t_{max} anında gerçekleşir.

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}}$$

Sonuç olarak, maksimum aşma $C_{\max} - 1 = e^{-\pi\varsigma/\sqrt{1-\varsigma^2}}$. Maksimum aşma miktarı sadece ζ değerine bağlıdır ve ω_n'den bağımsızdır. Başka bir ifadeyle, belirli bir ζ değeri, bir maksimum aşmaya karşılıktır.

$$t\big|_{\max\ or\ \min} = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}} \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

Sabit bir ζ için, ω_n'in artması, tepke hızını arttırır ve çıkışın yerel maksimum yada minimum ulaşma süresini azaltır.

Şimdi, çıkış sinyalinden sistem parametrelerinin nasıl bulunacağını ele alalım. Aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahip, bilinen ikinci dereceden bir sistemi ele alalım.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{B}{s^2 + As + B}$$

Burada A ve B bilinmeyen katsayılardır.

Basamak giriş için, c(t) çıkışı aşmaya sahipse, A ve B katsayıları c(t) çıkış tepkesinden elde edilebilir. Bunun için aşağıdaki adımlar izlenir:

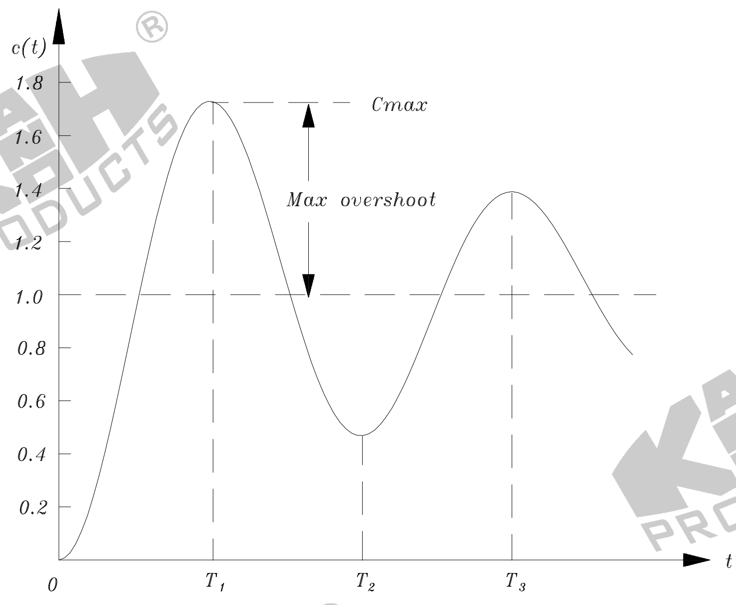
Önce iki sistemi karşılaştırın.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{B}{s^2 + As + B} \quad \text{and} \quad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2}$$

A ve B çözülürse,

$$A = 2\omega_n\varsigma$$
$$B = \omega_n^2$$

Şekil 5-4, ikinci dereceden sistemin basamak tepkesini göstermektedir.



Şekil 5-4 İkinci dereceden sistem tepkesi

C_{max}, T_1 ve T_2, c(t) çıkışından elde edilebilir. ζ değeri, aşağıdaki denklemlerden elde edilebilir.

$$C_{\max} - 1 = e^{-\pi\varsigma/\sqrt{1-\varsigma^2}}$$

$$\frac{-\pi\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}} = \ln(C_{\max} - 1)$$

$$\pi^2\varsigma^2 = \left[\ln(C_{\max} - 1)\right]^2 - \left[\ln(C_{\max} - 1)\right]^2\varsigma^2$$

$$\varsigma^2 = \left|\frac{\left[\ln(C_{\max} - 1)\right]^2}{\pi^2 + \left[\ln(C_{\max} - 1)\right]^2}\right|$$

$$\because\ \varsigma \geq 0$$

$$\therefore\ \varsigma = \sqrt{\left|\frac{\left[\ln(C_{\max} - 1)\right]^2}{\pi^2 + \left[\ln(C_{\max} - 1)\right]^2}\right|}$$

t_{max} ve ω_n, aşağıdaki denklemlerden bulunabilir.

$$\because\ t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}} = T_1$$

$$\therefore\ \omega_n = \frac{\pi}{t_{\max}\sqrt{1-\varsigma^2}}$$

A ve B sabitleri, aşağıdaki denklemler kullanılarak elde edilebilir.

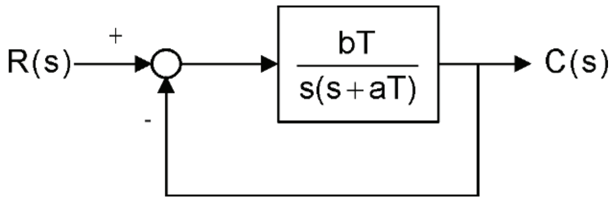
$$A = 2\omega_n\varsigma$$

$$B = \omega_n^2$$

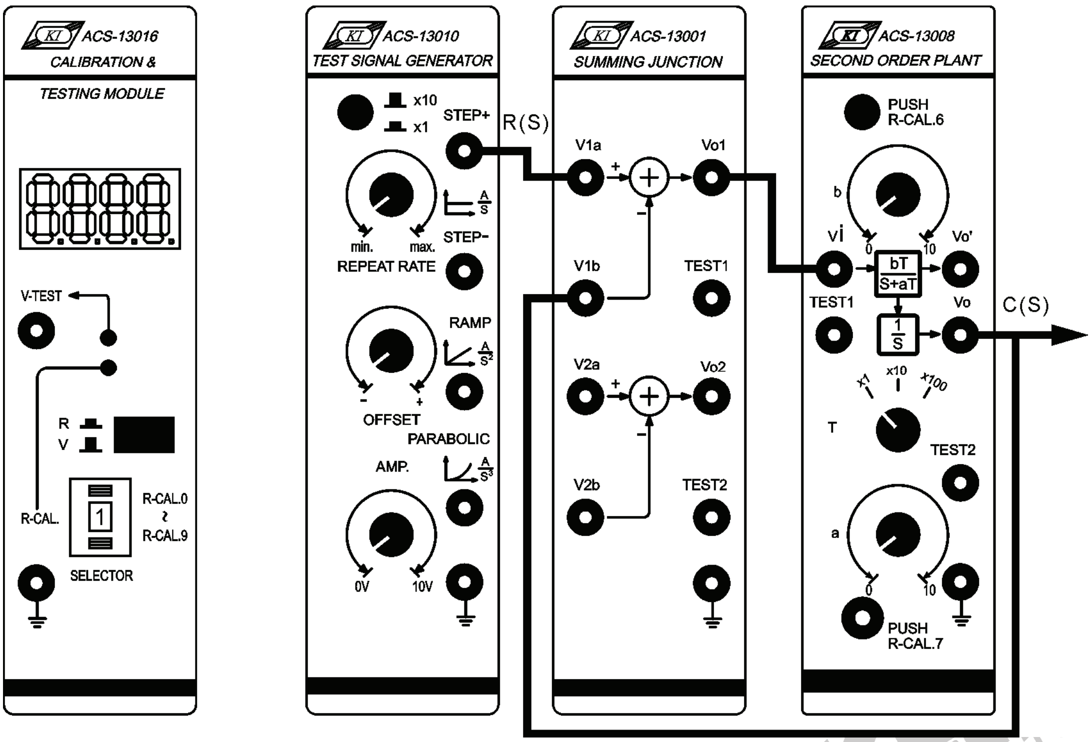
DENEYİN YAPILIŞI

A. ζ'nin İkinci Dereceden Sisteme Etkileri

1. Şekil 5-5'te gösterilen blok ve bağlantı diyagramlarından yararlanarak gerekli bağlantıları yapın.



(a) Blok diyagram



(b) Bağlantı diyagramı

Şekil 5-5

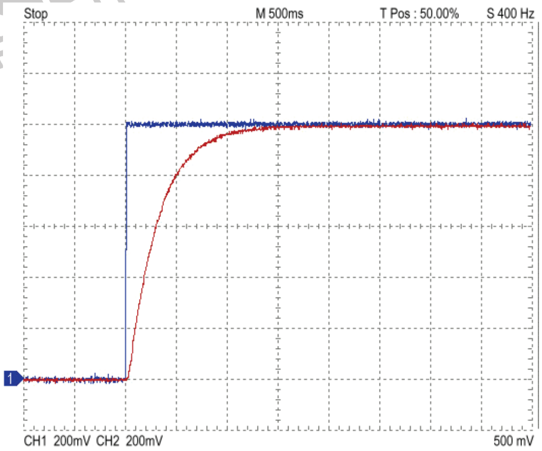
2. ACS-13010 STEP+ çıkış terminalinde 0.1Hz, 1Vpp'lik bir kare dalga üretin.

3. $bT = \omega_n^2$ ve $aT = 2\omega_n\varsigma$ olduğu için, sabit bir bT değeri, sabit bir ω_n değerine eşdeğerdir. Sabit bT durumunda, aT değerindeki bir değişim, ζ değerindeki değişime eşdeğerdir. ACS-13008'de, T seçici anahtarını x10 konumuna getirin, b'yi 10'a ayarlayın ($\omega_n = 10$). Böylece sistemin transfer fonksiyonu

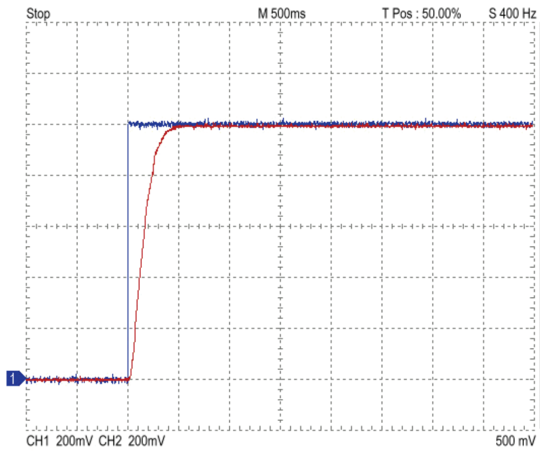
$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{100}{s^2+aTs+100}$$

4. $\omega_n=10$, T=10 ve $aT=2\omega_n\varsigma$ için, $a=2\varsigma$ olur. b ve T'yi aynı bırakın. ACS-13008'de, a=4 yapın (ζ=2). Osiloskop kullanarak, ACS-13010 STEP+ çıkış ve ACS-13008 Vo çıkış terminallerindeki sinyalleri, şekil 5-6(a)'da gösterildiği gibi, ölçün ve kaydedin.

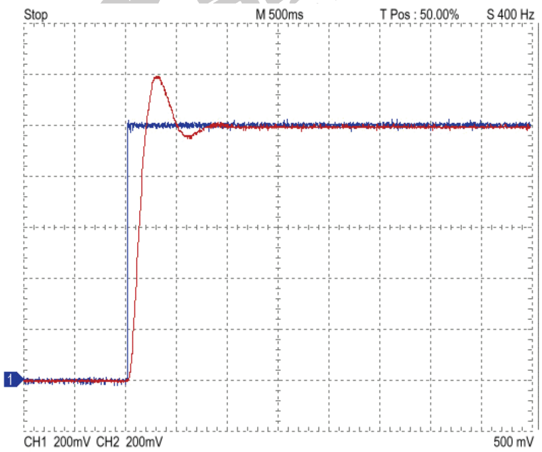
5. a=2, 1, 0 (ζ=1, 0.5, 0) için 4. adımı tekrarlayın ve sonuçları, sırasıyla, 5-6(b),(c) ve (d)'de gösterildiği gibi kaydedin.



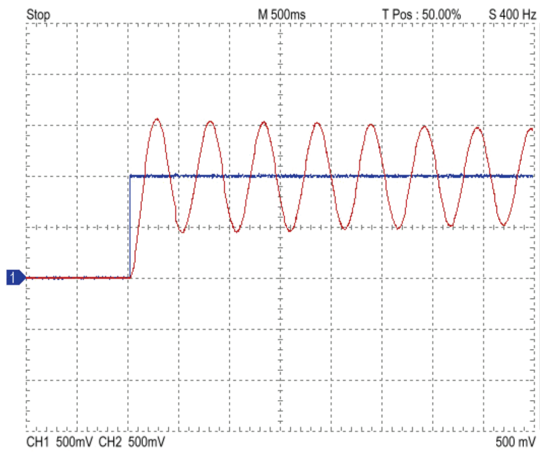
(a) $100/(s^2+40s+100)$ tepkesi, ζ=2
aşırı-sönümlü durum



(b) $100/(s^2+20s+100)$ tepkesi, ζ=1
kritik-sönümlü durum



(c) $100/(s^2+10s+100)$ tepkesi, ζ=0.5,
eksik-sönümlü durum



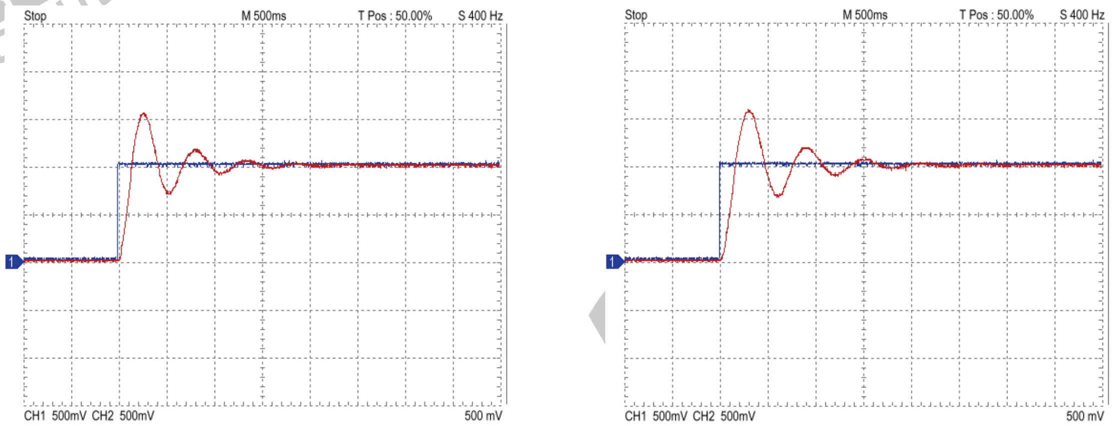
(d) $100/(s^2+100)$ tepkesi, ζ=0,
sönümsüz durum

Şekil 5-6

B. ω_n'in İkinci Dereceden Sisteme Etkileri

1. ACS-13010 STEP+ çıkış terminalinde 0.1Hz, 1Vpp'lik bir kare dalga üretin.

2. $bT = \omega_n^2$ ve $aT = 2\omega_n\varsigma$ olduğu için, ω_n değiştirilerek, a ve b değiştirilebilir. ACS-13008'de, T seçici anahtarını x10 konumuna getirin, b=10 (ω_n=10) ve a=0.4 (ζ=2) yapın. Osiloskop kullanarak, ACS-13010 STEP+ çıkış ve ACS-13008 Vo çıkış terminallerindeki sinyalleri, şekil 5-7(a)'da gösterildiği gibi, ölçün ve kaydedin.



(a) $\dfrac{100}{s^2 + 4s + 100}$ tepkesi, $\omega_n = 10$, ζ=0.2, aT=4, bT=100

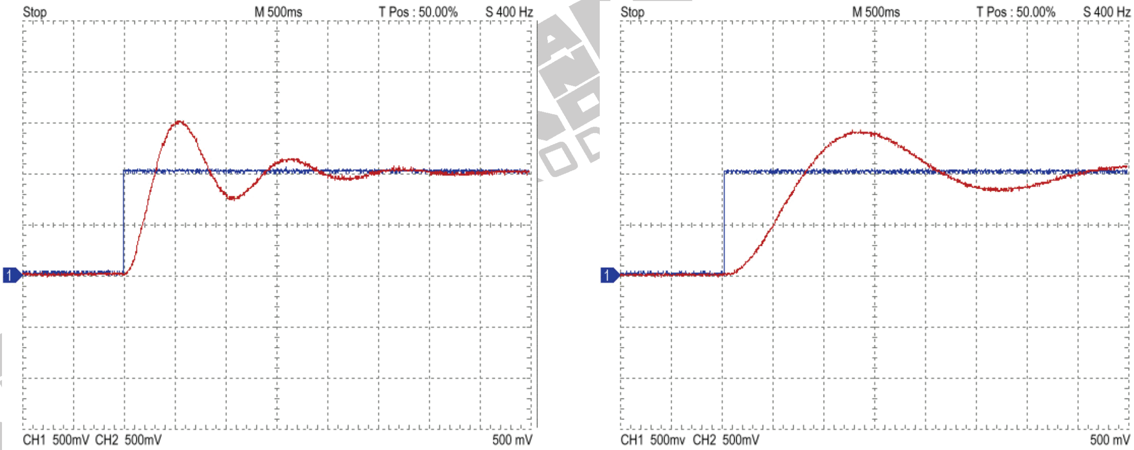
(b) $\dfrac{64}{s^2 + 3.2s + 64}$ tepkesi, $\omega_n = 8$, ζ=0.2, aT=3.2, bT=64

Şekil 5-7

3. 2. adımı, a=0.32 ve b=6.4 ($\varsigma = 0.2$ ve $\omega_n = 8$) için tekrarlayın ve sonucu 5-7(b)'de gösterildiği gibi kaydedin.

4. 2. adımı, a=0.2 ve b=2.5 ($\varsigma = 0.2$ ve $\omega_n = 5$) için tekrarlayın ve sonucu 5-8(a)'da gösterildiği gibi kaydedin.

5. 2. adımı, a=0.16 ve b=1.6 ($\varsigma = 0.2$ ve $\omega_n = 4$) için tekrarlayın ve sonucu 5-8(b)'de gösterildiği gibi kaydedin.



(a) $\dfrac{25}{s^2+2s+25}$ tepkesi

$\omega_n = 5$, $\varsigma = 0.2$, aT=2, bT=25

(b) $\dfrac{4}{s^2+0.8s+4}$ tepkesi

$\omega_n = 2$, $\varsigma = 0.2$, aT=0.8, bT=4

Şekil 5-8

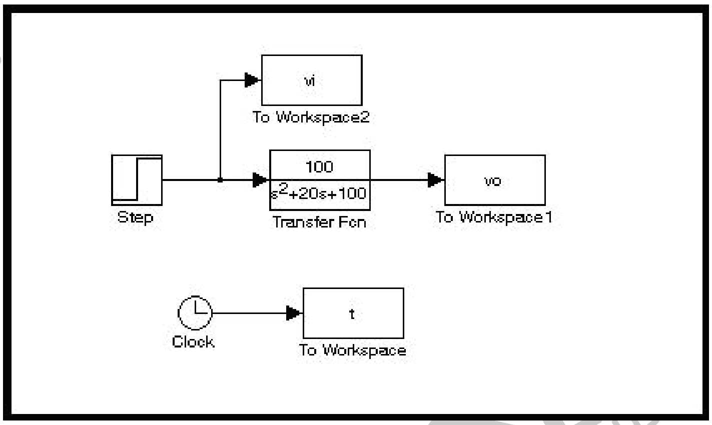
C. ACS-13008'de, a, b ve T değerlerine keyfi değerler atayın ve ölçülen çıkış tepkesinden, ζ ve ω_n'i bulun.

SIMULINK BENZETİMİ

1. MATLAB komut penceresini (command window) açın.

2. MATLAB komut penceresinde *simulink* yazıp enter'a basın.

3. *untitled* adlı pencerede, şekil 5-9'da gösterilen blok diyagramı çizin.



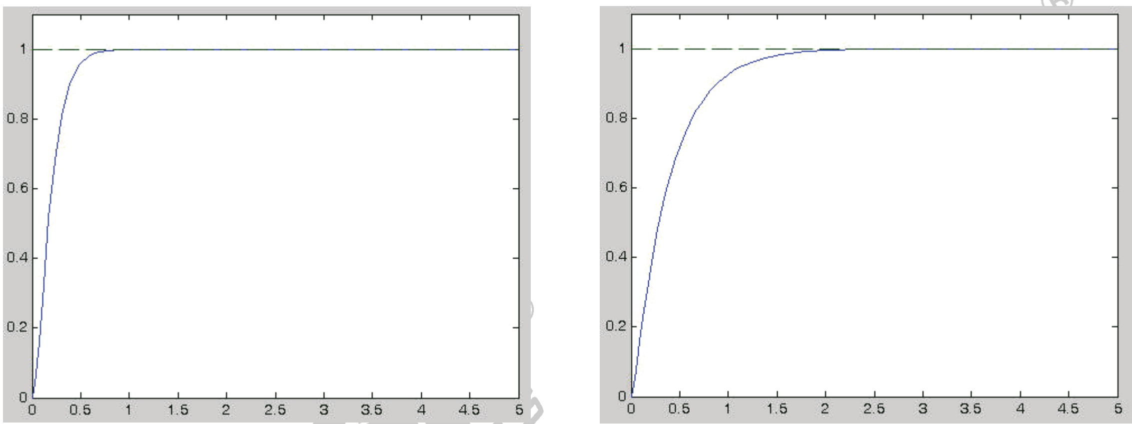
Şekil 5-9

4. Step bloğunun *Final value* değerini 1, *Step time* değerini 0.02 yapın.

5. "Simulation/Configuration parameters" menüsüne girin ve "Simulation time" diyalog penceresinde *Stop time* değerini 5.0 olarak değiştirin.

6. Blok diyagramı Deney_5_1.mdl adıyla kaydedin.

7. Simülasyonu çalıştırın ve şekil 5-10(a)'da gösterilen sonucu elde edin.

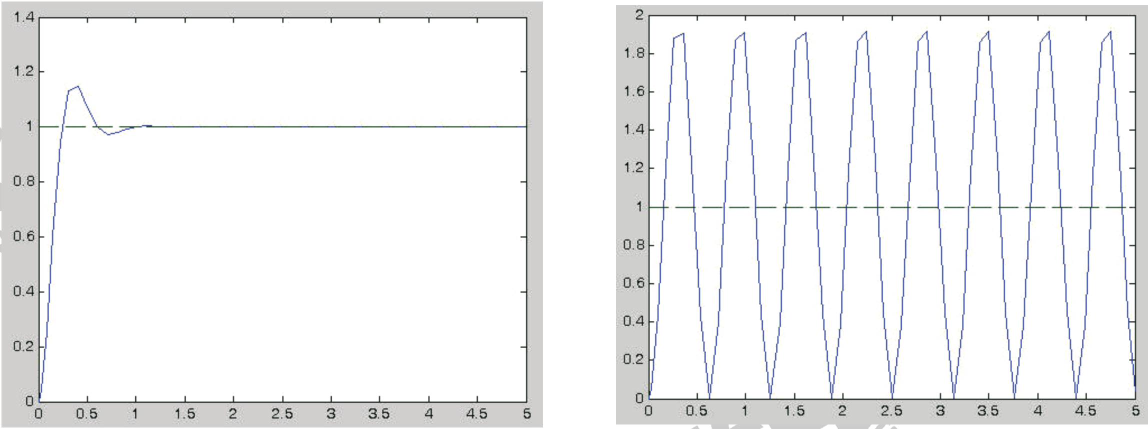


(a)$100/(s^2+20s+100)$, $\varsigma = 1$ (b)$100/(s^2+40s+100)$, $\varsigma = 2$

Şekil 5-10

8. *Transfer Fcn* bloğunun paydasını, [1 40 100] yapın. Böylece, aT=40, bT=100, $\omega_n = 10$ ve $\varsigma = 2$ olur. Simülasyonu çalıştırıp, şekil 5-10(b)'deki sonucu elde edin.

9. *Transfer Fcn* bloğunun paydasını, [1 10 100] yapın. Böylece, aT=10, bT=100, $\omega_n = 10$ ve $\varsigma = 0.5$ olur. Simülasyonu çalıştırıp, şekil 5-11(a)'daki sonucu elde edin.

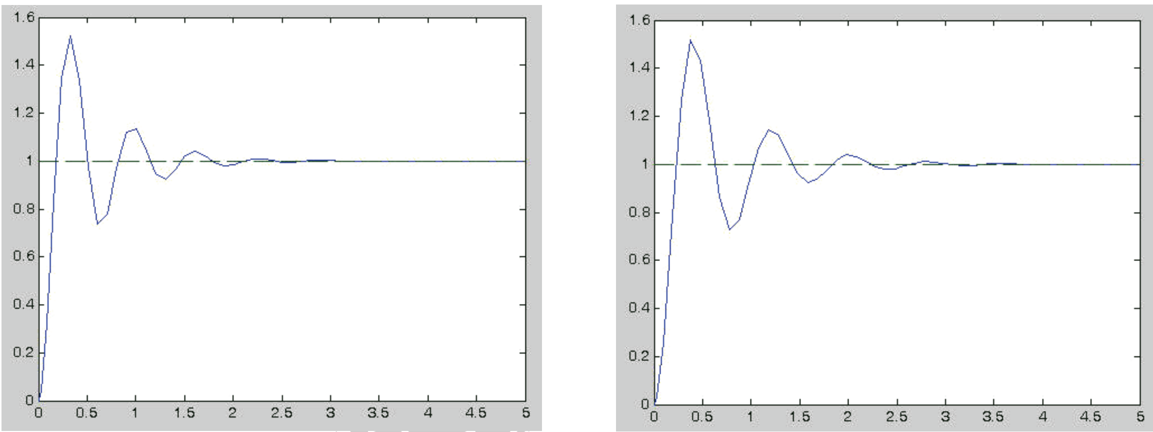


(a) 100/(s ^{2} +10s+100), $\varsigma = 0.5$ (b) 100/(s ^{2} +100), $\varsigma = 0$

Şekil 5-11

10. *Transfer Fcn* bloğunun paydasını, [1 10 100] olarak ayarlayın. Böylece, aT=0, bT=100, $\omega_n = 10$ ve $\varsigma = 0$ olur. Simülasyonu çalıştırın ve şekil 5-11(b)'de gösterilen sonucu elde edin.

11. *Transfer Fcn* bloğunun paydasını, [1 4 100] olarak ayarlayın. Böylece, aT=4, bT=100, $\omega_n = 10$ ve $\varsigma = 0.2$ olur. Simülasyonu çalıştırın ve şekil 5-12(a)'da gösterilen sonucu elde edin.



(a) 100/(s ^{2} +4s+100), $\omega_n = 10$ (b) 100/(s ^{2} +3.2s+64), $\omega_n = 8$

Şekil 5-12

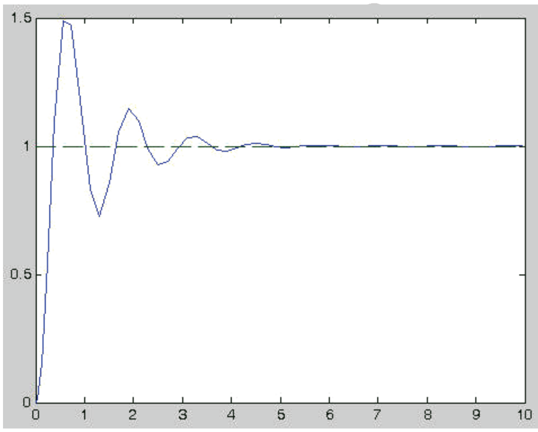
12. *Transfer Fcn* bloğunun paydasını, [1 3.2 64] olarak ayarlayın. Böylece, aT=3.2, bT=64, $\omega_n = 8$ ve $\varsigma = 0.2$ olur. Simülasyonu çalıştırın ve şekil 5-12(b)'de gösterilen sonucu elde edin.

13. "Simulation/Configuration parameters" menüsüne girin ve "Simulation time" diyalog penceresinde *Stop time* değerini 10.0 olarak değiştirin.

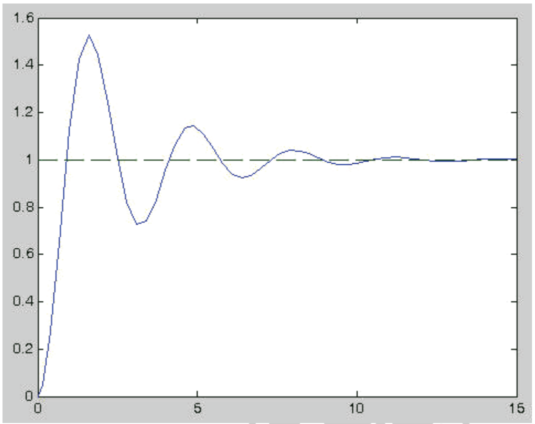
14. *Transfer Fcn* bloğunun paydasını, [1 2 25] olarak ayarlayın. Böylece, aT=2, bT=25, $\omega_n = 5$ ve $\varsigma = 0.2$ olur. Simülasyonu çalıştırın ve şekil 5-13(a)'da gösterilen sonucu elde edin.

15. "Simulation/Configuration parameters" menüsüne girin ve "Simulation time" diyalog penceresinde *Stop time* değerini 15.0 olarak değiştirin.

16. *Transfer Fcn* bloğunun paydasını, [1 0.8 4] olarak ayarlayın. Böylece, aT=0.8, bT=4, $\omega_n = 2$ ve $\varsigma = 0.2$ olur. Simülasyonu çalıştırın ve şekil 5-13(b)'de gösterilen sonucu elde edin.



(a) 25/(s^2+2s+25), $\omega_n = 5$



(b) 4/(s^2+0.8s+4), $\omega_n = 2$

Şekil 5-13